Compas de proportion

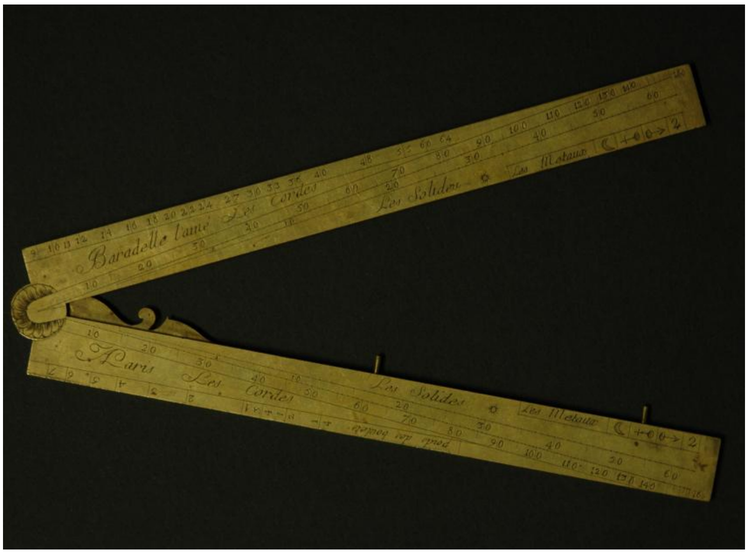
de Jacques-Nicolas Baradelle dit l’ainé

Francis Ziegeltrum

1. Introduction

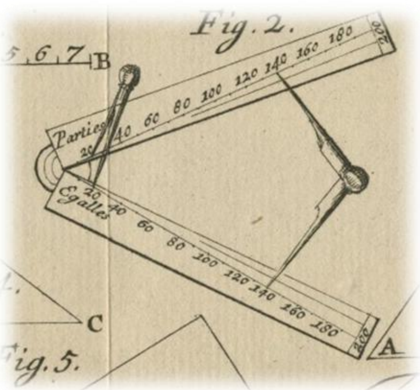
COMPAS DE PROPORTION : cet instrument de Mathématiques, que les Anglais appellent *secteur*, est d’un grand usage pour trouver des proportions entre des quantités de même espèce, comme entre lignes & lignes, surfaces & surfaces, *&c.* c’est pourquoi l’on appelle en France, *compas de proportion.(Extrait de Encyclopédie Ou Dictionnaire Raisonné Des Sciences, Des Arts Et Des Métiers Tome troisième)*

Le compas de proportion présenté ici a une longueur de six pouces et a été fabriqué vers 1750 par Jacques-Nicolas Baradelle dit l’ainé, ingénieur en instruments, installé quai de l’Horloge du Palais à l’enseigne À l’Observatoire à Paris.



2. Fonctionnement

Cet instrument consiste en deux règles ou jambes égales, de cuivre ou d’autre matière, rivées l’une à l’autre, en sorte néanmoins qu’elles peuvent tourner librement sur leur charnière. Sur les faces de cet instrument sont tracées plusieurs lignes, dont les principales sont la ligne des parties égales, la ligne des plans, la ligne des polygones, la ligne des cordes et la ligne des solides.



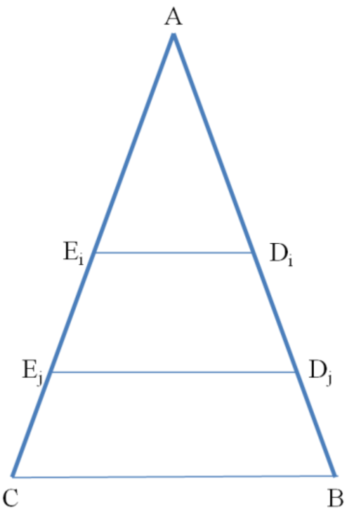
D'une manière générale, le travail sur compas de proportion se fait à l'aide d'un compas ordinaire à pointes sèches. Avec ce dernier, on prend une mesure donnée et on la reporte sur le compas de proportion entre deux graduations identiques d'une même "ligne" sur les branches que l'on ouvre en conséquence ; puis, conservant au compas de proportion son ouverture ainsi déterminée, on mesure avec les pointes sèches, entre deux autres graduations identiques d'une même ligne, la quantité recherchée.

3. Principe mathématique

Le compas de proportion est fondé sur la quatrième proposition du sixième livre d'Euclide, où il est démontré que les triangles semblables ont leurs côtés homologues proportionnels.

Supposons que les lignes AB et AC soient les jambes du compas, et que AD_i, AE_i représentent deux sections égales qui passent par le centre, de même que AD_j, AE_j ; si alors on joint les points D_iE_i et D_jE_j, les lignes D_iE_i et D_jE_j seront parallèles : c'est pourquoi les triangles AD_iE_i et AD_jE_j sont semblables, et par conséquent AD_i est proportionnel à AD_j, AE_i est proportionnel à AE_j et D_iE_i est proportionnel à D_jE_j ainsi $\frac{D_iE_i}{D_jE_j} = \frac{AD_i}{AD_j} = \frac{AE_i}{AE_j}$

On désignera par L la longueur de la pleine échelle.



4. Description des lignes graduées

Lignes graduées principales- première face

<u>La ligne des Parties Egales</u>

Elle est divisée en 200 parties égales, numérotées de 10 en 10. Elle sert à résoudre des problèmes arithmétiques tels que diviser une longueur donnée en intervalles égaux, ou en parties proportionnelles, trouver une longueur proportionnelle à une autre, etc.

$AD_i = AE_i = i\frac{L}{200}$ et $AD_j = AE_j = j\frac{L}{200}$

Donc $\boxed{\frac{D_iE_i}{D_jE_j} = \frac{AD_i}{AD_j} = \frac{i}{j}}$

La ligne des Plans

Elle est divisée en 64 parties, numérotées de 10 en 10. C'est une échelle proportionnelle au carré des distances de chaque division à l'origine (c'est-à-dire au centre du compas). Elle donne la longueur des côtés homologues de surfaces multiples (double, triple ...) de la plus petite prise comme unité. Cette échelle permet de résoudre des problèmes relatifs aux surfaces comme la précédente permettait de résoudre ceux relatifs aux segments de droite.

$AD_i{}^2 = AE_i{}^2 = i\,\frac{L}{64}$ et $AD_j{}^2 = AE_j{}^2 = j\,\frac{L}{64}$

Donc $\boxed{\frac{D_iE_i}{D_jE_j} = \frac{AD_i}{AD_j} = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{j}}}$

La ligne des Polygones

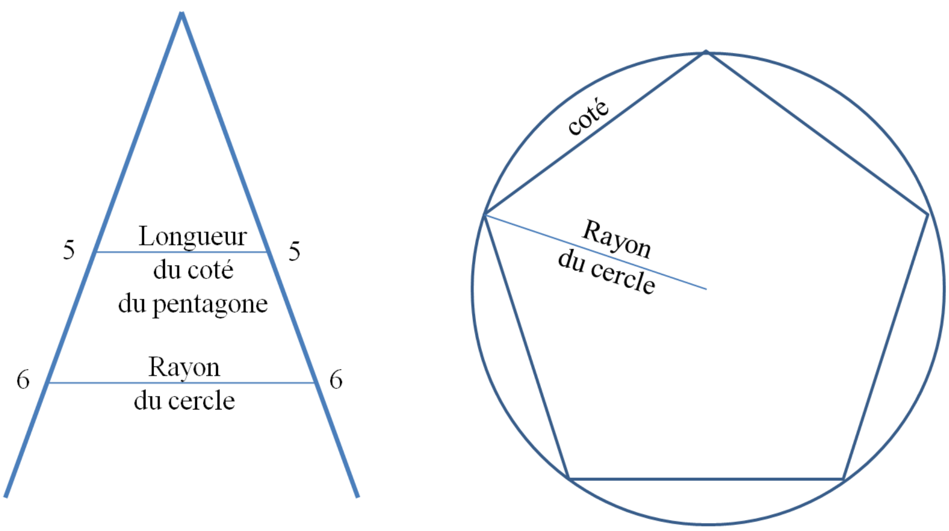
Elle comprend 10 graduations, numérotées de 3 à 12. Elle donne la longueur des côtés respectifs des dix premiers polygones inscrits dans un cercle de rayon donné. On lit depuis le centre jusqu'au chiffre caractéristique du polygone visé (3 pour le triangle équilatéral, 4 pour le carré, et ainsi de suite pour le pentagone, l'hexagone, l'heptagone, l'octogone, l'ennéagone, le décagone, l'hendécagone, jusqu'à 12 pour le dodécagone).

$AD_i = AE_i = \frac{2L}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{i}$ et $AD_j = AE_j = \frac{2L}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{j}$

Donc $\boxed{\frac{D_iE_i}{D_jE_j} = \frac{AD_i}{AD_j} = \frac{\sin\frac{\pi}{i}}{\sin\frac{\pi}{j}}}$

Remarque

Pour tracer un polygone on ouvre le compas de proportion tel que $D_6E_6 = r$ rayon du cercle circonscrit puis on mesure le coté du polynôme entre les graduations correspondantes.

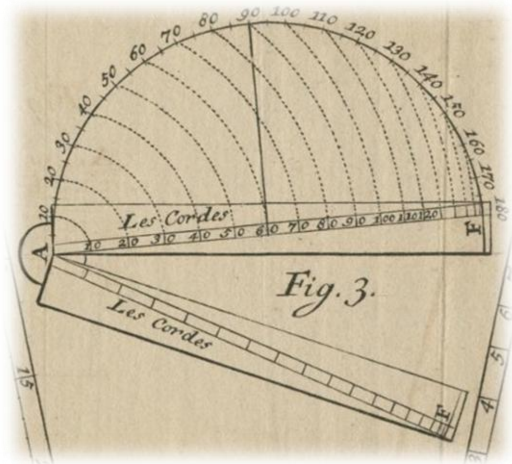


Lignes graduées principales- deuxième face

La ligne des Cordes

Elle est divisée en 180 parties, numérotées de 10 en 10. C'est une échelle proportionnelle aux arcs successifs (de degré en degré) du demi-cercle dont le diamètre est égal à la longueur de cette échelle. Elle permet des opérations sur les arcs et les angles.

Comme le rapport de la longueur d'une corde à celle du diamètre est égal au sinus du demi-angle au centre :



$AD_i = AE_i = L \sin\frac{\pi i}{360}$ et $AD_j = AE_j = L \sin\frac{\pi j}{360}$

Donc $\boxed{\frac{D_iE_i}{D_jE_j} = \frac{AD_i}{AD_j} = \frac{\sin\frac{\pi i}{360}}{\sin\frac{\pi j}{360}}}$

La ligne des Solides

Elle est divisée en 64 parties, numérotées de 10 en 10. C'est une échelle proportionnelle au cube des distances de chaque division à l'origine (centre du compas). Elle donne la longueur des côtés homologues des volumes multiples (double, triple ...) du plus petit pris comme unité. Cette échelle permet de résoudre des problèmes relatifs aux volumes comme celles des Plans ou des Parties Egales le permettaient pour les surfaces ou les segments de droite.

${AD_i}^3 = {AE_i}^3 = i\,\frac{L}{64}$ et ${AD_j}^3 = {AE_j}^3 = j\,\frac{L}{64}$

Donc $\boxed{\frac{D_iE_i}{D_jE_j} = \frac{AD_i}{AD_j} = \frac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt[3]{j}}}$

Lignes secondaires

<u>La ligne des Métaux</u>
Elle comprend 6 graduations, accompagnées chacune du symbole astronomique de l'un des six métaux usuels présentés dans l'ordre de leurs densités. De l'extrémité du compas vers le centre, on a :

♃ (Jupiter) pour l'étain,
♂ (Mars) pour le fer,
♀ (Vénus) pour le cuivre,
☾ (Lune) pour l'argent,
pas de symbole pour le plomb,
☉ (Soleil) pour l'Or.

Les distances de chaque graduation au centre du compas sont inversement proportionnelles à la racine cubique de la densité des métaux. A l'aide de cette échelle, on peut résoudre des problèmes de poids, de volumes ou de composition d'alliage des métaux.

<u>La ligne du Calibre des Pièces et celle du Poids des Boulets de fer</u>
Elles sont graduées pour les boulets de 1/4 de livre à 64 livres.

Remarque

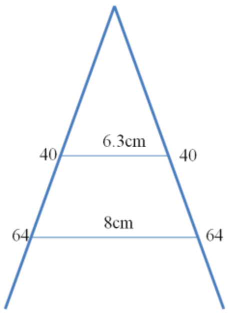
Sur cet exemplaire les lignes des plans et des solides ont été échangés ce qui lui donne une certaine originalité.

5. Exemples d'utilisation

Il existe de nombreux livres décrivant de façon très détaillé l'usage du compas de proportion. Parmi tous les exemples qu'ils présentent il en est des plus originaux que d'autres. En voici quelques uns.

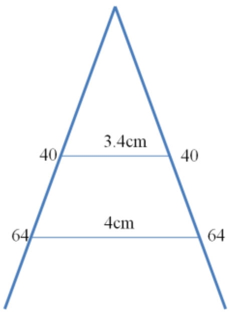
Calculer la racine carrée d'un nombre

Soit à déterminer la racine carrée de 40.
Avec le compas à pointes sèches on reporte 8cm entre les graduations 64 de la *ligne des plans* puis on mesure entre les graduations 40.
On trouve environ 6,3cm.



Calculer la racine cubique d'un nombre

Soit à déterminer la racine cubique de 40.
Avec le compas à pointes sèches on reporte 4cm entre les graduations 64 de la *ligne des solides* puis on mesure entre les graduations 40.
On trouve environ 3,4cm.



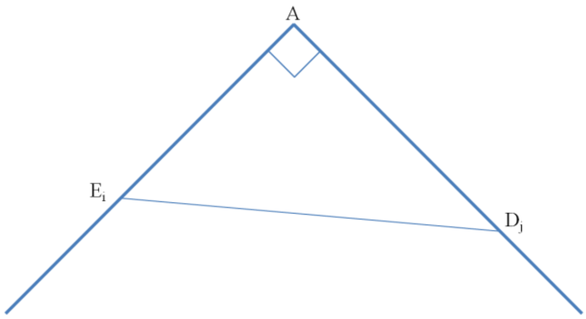
Mesurer un angle

Soit à déterminer l'angle d'ouverture du compas de proportion.

Avec le compas à pointes sèches on mesure l'ouverture entre les graduations 60 de *la ligne des cordes*, on la reporte sur la ligne à partir de l'origine et on lit directement l'angle d'ouverture du compas de proportion.

Ouvrir le compas de proportion afin que angle entre les 2 lignes soit droit

C'est un exercice que Jacques Ozanam a répété dans son livre pour chaque type de lignes. S'il l'a répété autant de fois, c'est parce que pour chaque lignes la solution fait appel à un autre résonnement. Pour ouvrir le compas de proportion à angle droit il suffit de former un triangle rectangle E_iAD_j en trouvant des valeurs i et j remarquables et une longueur E_iD_j adéquate.



Ligne des Parties Egales

On prend depuis le centre A du compas de proportion, 180 parties et on l'applique sur la ligne des parties égales, de part et d'autre, en 108 et 144.
Dans ce cas la longueur E_iD_j=180, i=108 et j=144.
En effet $108^2 + 144^2 = 180^2$

Ligne des Plans

On prend depuis le centre A du compas de proportion, une longueur quelconque, par exemple 40, et on l'applique sur la ligne des plans, de part et d'autre à un nombre égal à la moitié de la longueur, c'est-à-dire 20.
Dans ce cas la longueur E_iD_j=40, i= j=20.
En effet $\sqrt{20}^2 + \sqrt{20}^2 = \sqrt{40}^2$

Ligne des Polygones

On prend depuis le centre A du compas de proportion, la longueur du coté du pentagone et on l'applique sur la ligne des polygones, de part et d'autre en 10 et 6.
Dans ce cas la longueur E_iD_j=5, i=10 et j=6.
Montrons que $\sin^2\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{10} = \sin^2\frac{\pi}{5}$
Comme $\sin^2\frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}$; $\sin^2\frac{\pi}{10} = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16}$ et $\sin^2\frac{\pi}{10} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{10} = 1 - \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{16}$

$\sin^2\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{10} - \sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4} + \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16} - 1 + \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{16} = \frac{4+5-2\sqrt{5}+1-16+5+2\sqrt{5}+1}{16} = 0$ CQFD

Ligne des Cordes

On prend depuis le centre A du compas de proportion, la longueur correspondant à 90, et on l'applique sur la ligne des cordes, de part et d'autre en 60.
Dans ce cas la longueur E_iD_j=90, i= j=60.
En effet $\sin^2\frac{\pi.60}{360}+\sin^2\frac{\pi.60}{360}=\sin^2\frac{\pi.90}{360}$

Ligne des Solides

On prend depuis le centre A du compas de proportion, 15 parties et on l'applique sur la ligne des parties égales, de part et d'autre, en 3 et 8.
Dans ce cas la longueur E_iD_j=15, i=3 et j=8.
En effet $\sqrt[3]{3}^2+\sqrt[3]{8}^2\simeq\sqrt[3]{15}^2$, il s'agit dans ce cas d'une formule approchée.

6. Conclusion

De sa création jusqu'à la fin du XIXème siècle le compas de proportion faisait partie des nécessaires de dessin des ingénieurs, des architectes et même des monarques (ci-contre celui de Louis XVI exposé au musée Carnavalet). Il permettait de manipuler des grandeurs sans rechercher la grande précision et parfois même sans se soucier de la valeur réelle de la grandeur. La règle à calcul, basée sur les nombres logarithmiques, plus précise et plus proche des besoins des ingénieurs le remplaça progressivement. Aujourd'hui il nous reste la beauté surannée d'un instrument d'un autre temps.

7. Bibliographie

- L'usage du compas de proportion-Jacques Ozanam
- L'usage du compas de proportion-Denis Henrion
- Traité de la construction et des principaux usages des instruments de mathématiques-Nicolas Bion
- Le compas de proportion-Serge Savoysky